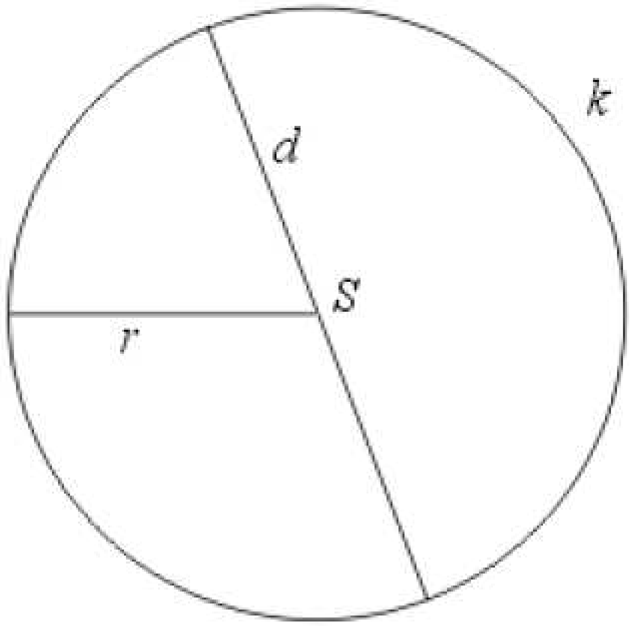
Kruh, kružnice, válec

1. Kruh, kružnice

1.1. Základní pojmy

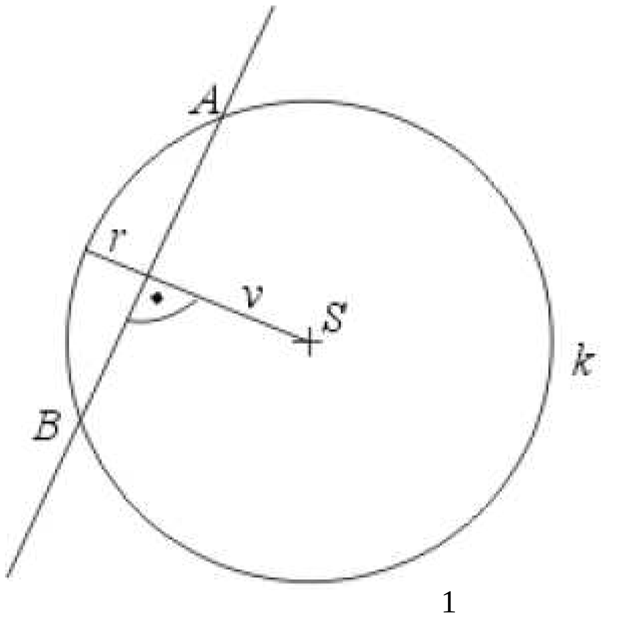
Kružnice je množina bodů mající od daného bodu stejnou vzdálenost.
Daný bod označujeme jako **střed kružnice**.
Stejnou vzdálenost nazýváme **poloměr** a označujeme r.
Průměr je úsečka, která spojuje dva body na kružnici, která prochází středem kružnice.
Průměr označujeme d.

Mezi poloměrem a průměrem kružnice platí vztah : **d = 2 . r**



Zapíšeme k (S ; r) Čteme kružnice *k* je určena středem S a poloměrem r.

Tětiva je úsečka, která spojuje libovolné dva body na kružnici. (nemusí procházet středem kružnice). Nejdelší tětivou je průměr.



AB – tětiva

Příklad 1 : Narýsujte k (S ; 4,5 cm). Dále narýsujte :

a) dva navzájem kolmé průměry AB a CD;
b) dva poloměry SA a SB, které svírají úhel 75º;
c) tětivu /AB/ = 4 cm;
d) tětivu /CD/ = 4,5 cm a /DE/ = 5 cm;
e) poloměr SA a tětivu /AB/ = 6 cm;
f) bod A a tětivu AB a AC, které svírají pravý úhel;

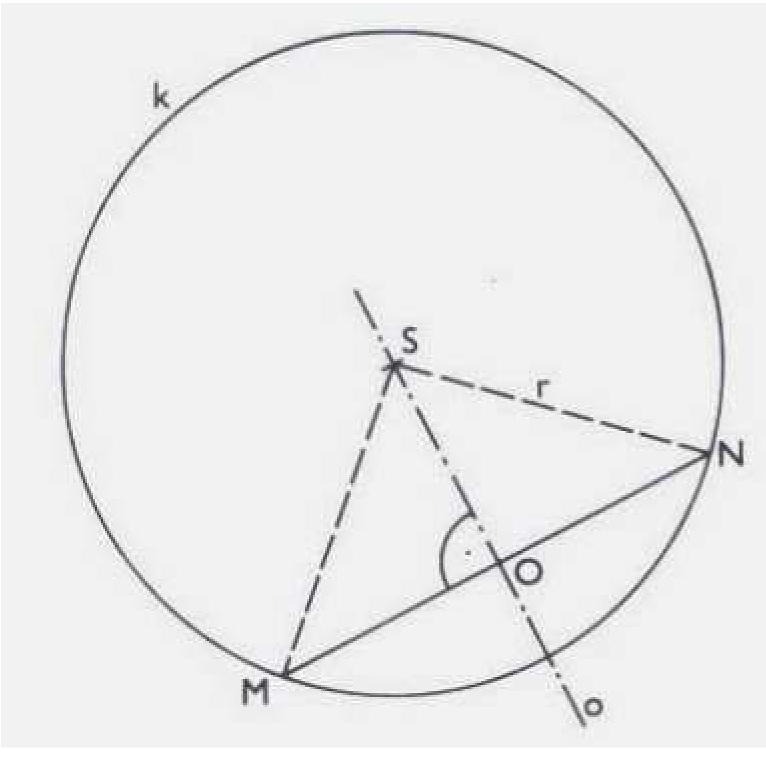
Příklad 2 : Jak nazýváme průsečík os všech tětiv dané kružnice ?

Příklad 3 : Je dána tětiva AB kružnice k (S; 5 cm). Kolik existuje tětiv :

a) rovnoběžných tětiv s tětivovou AB;
b) rovnoběžných tětiv s tětivovou AB délky 5 cm;
c) rovnoběžných tětiv s tětivovou AB délky 10 cm;
d) rovnoběžných tětiv s tětivovou AB délky 15 cm;
e) kolmých tětiv na tětivu AB o délce 5 cm;
f) kolmých tětiv na tětivu CD, která svírá s tětivou AB úhel 45º, délky 5 cm;
g) kolmých tětiv na tětivu CD, která svírá s tětivou AB úhel 45º, délky 15 cm;

Příklad : Je dána kružnice k (S ; 5 cm). Její tětiva MN je vzdálena od středu kružnice 3 cm. Vypočítejte její délku.

Řešení :



$r^2 = /SO/^2 + /MO/^2$

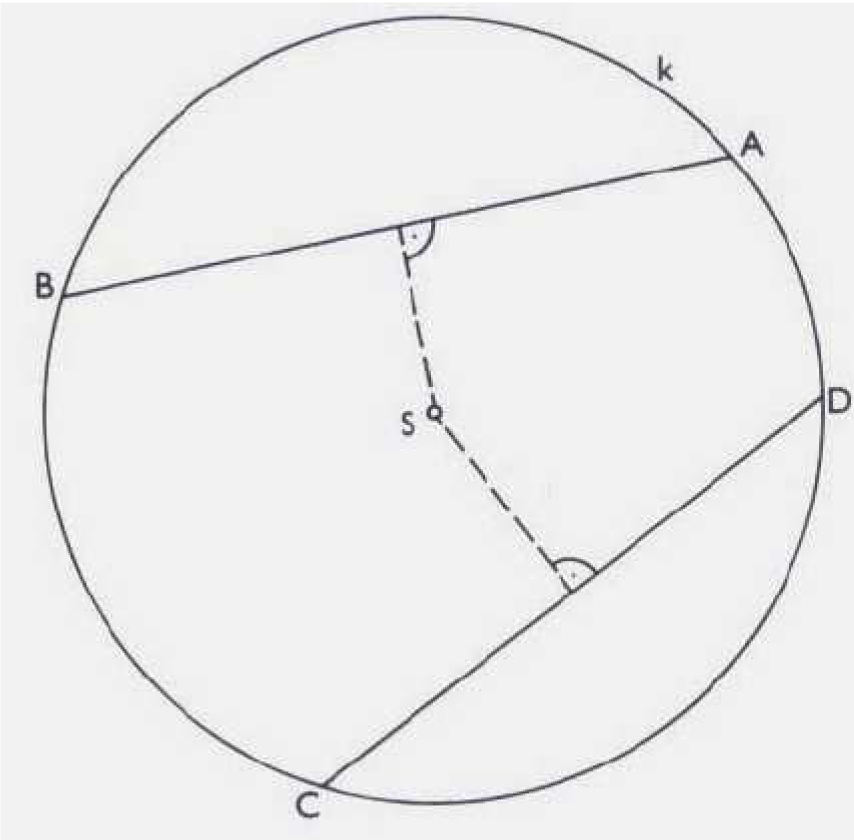
$5^2 = 3^2 + /MO/^2$

/MO/ = 4 cm

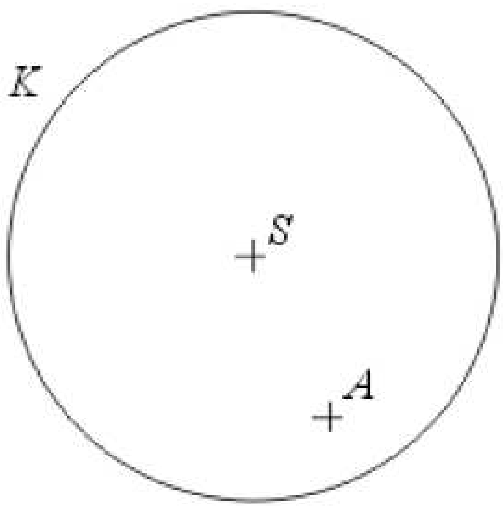
/MN/ = 8 cm

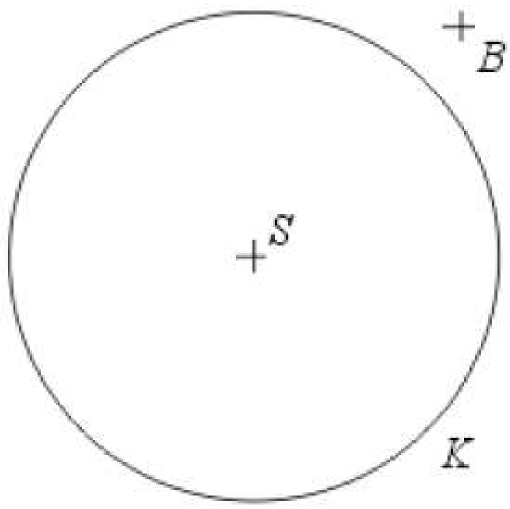
Příklad 4 : Tětiva /AB/ = 10 cm kružnice k je vzdálena os jejího středu 2 cm.

a) Vypočítejte velikost tětivy CD, jestliže je vzdálena od středu kružnice 2,5 cm.
b) Má na výsledek vliv skutečnost, že dané dvě tětivy budou rovnoběžné.
c) Kolik existuje rovnoběžných tětiv , které mají stejnou velikost.



Kruh je množina bodů, které mají od daného bodu (**středu kruhu**) vzdálenost menší nebo rovnu danému číslu (**poloměru**).
Mezi poloměrem a průměrem kruhu platí vztah : $\mathbf{d = 2 . r}$





Zapíšeme K (S ; r)… Čteme kruh K je určen středem S a poloměrem r.
$A \in K$ Čteme bod A je bodem kruhu K (leží uvnitř kruhu K).
$B \notin K$ Čteme bod B není bodem kruhu K (neleží v kruhu K).

Kružnice i kruh je obrazec **osově souměrný** podle libovolné přímky, která prochází středem kružnice (kruhu).

Kružnice i kruh je obrazec **středově souměrný** podle svého středu.

2. **Délka kružnice**

$$\boxed{O = 2 \cdot \pi \cdot r} \qquad \boxed{O = \pi \cdot d}$$

π (pí) π nemá jednotky π – **Ludolfovo číslo .** Je to číslo, jehož desetinný rozvoj je neukončený a neperiodický, takové číslo se nazývá iracionální.

Hodnota π je přibližně $\frac{22}{7}$.

Pro výpočet můžeme používat přibližnou hodnotu $\pi = 3{,}14$

3. Obsah kruhu

$$\boxed{S = \pi \cdot r^2} \qquad \boxed{S = \pi \cdot \frac{d^2}{4}}$$

Příklad 5 : Ludolfova číslo je z hlediska výstavby číselných oborů jakým číslem ?

Příklad 6 : Vypočtěte délku kružnice a obsahu kruhu, je-li dáno :

a) r = 5cm;
b) r = 13 mm;
c) r = 6,4 dm;
d) d = 42 cm;
e) d = 2,1 m;
f) d = 9,1 cm;

Příklad 7 : Vypočtěte obsah kruhu, je-li dán obvod příslušné kružnice :

a) 31,4 cm;
b) 28,26 m;
c) 50,24 dm;
d) 62,8 mm;
e) 81,64 mm;

Příklad 8 : Vypočtěte obvod kružnice, známe-li obsah příslušného kruhu :

a) 200,96 cm^2;
b) 254,34 m^2;
c) 78,5 m^2;
d) 3,46 m^2;
e) 65 mm^2;

Příklad 9 : Kruh má stejný obsah jako čtverec, jehož obvod je 338,4 m. Vypočítejte průměr kruhu.

Příklad 10 : Otáčivý zavlažovač má dostřik 18 metrů.
a) Jakou rozlohu půdy může zavlažit z jednoho místa ?
b) Jakou rozlohu půdy může zavlažit, jestliže se může pohybovat po úsečce délky 40 metrů?

Příklad 11 : Kolikrát se na dráze 1 km otočí kolo, které má poloměr 20 cm ?

Příklad 12 : Vypočítejte délku kružnice, která je čtverci o straně 5 cm :
a) opsaná;
b) vepsaná.

Příklad 13 : Ze čtverce se má vystřihnout kruh, jehož obsah je 100 cm^2. Vypočítejte délku strany nejmenšího čtverce, ze kterého lze tento kruh vystřihnout ?

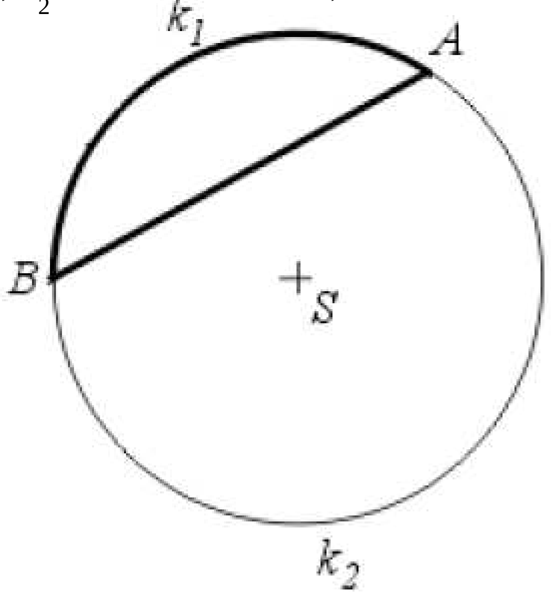
Příklad 14 : Do čtverce o straně 20 cm je možné narýsovat co největší množství kruhů o průměru 4 cm. Vypočtěte velikost plochy čtverce, která nepatří žádnému kruhu.

Příklad 15 : Deska kruhového stolu má obsah 50,24 dm^2. Vypočítejte průměr kruhového ubrusu, má-li přesahovat okraj stolu o 30 cm.

Příklad 16 : Obsah kruhu je $4.\pi$ cm^2. Vypočtěte přesně délku kružnice, která přísluší tomuto kruhu.

4. <u>Oblouk kružnice</u>

Oblouk kružnice je část kružnice, která je ohraničena dvěma body na kružnici.
Dva body na kružnici dělí kružnici na dva oblouky kružnice, které v našem případě jsme označili k_1, k_2. Můžeme také říci, že tětiva rozdělí kružnici na dva kruhové oblouky.

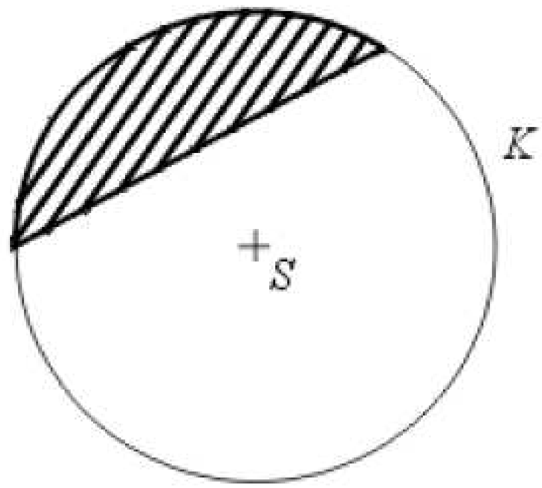


Délka kruhového oblouku

$$\boxed{O = \frac{2\pi r}{360^o} \cdot \alpha}$$

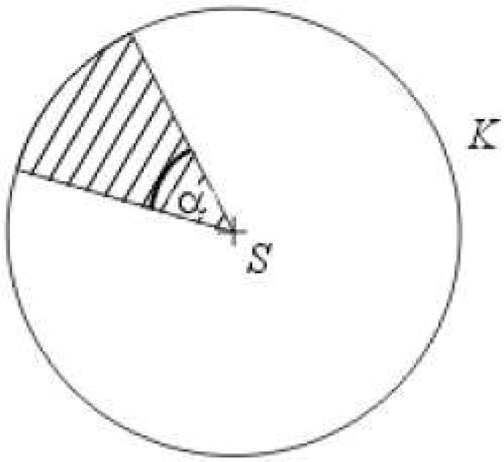
5. Kruhová úseč

Kruhová úseč je část kruhu ohraničená tětivou a obloukem kružnice.
Největší kruhová úseč je polokruh (tětiva je průměr)



6. Kruhová výseč

Kruhová výseč je část kruhu ohraničená dvěma poloměry kruhu a obloukem kružnice.



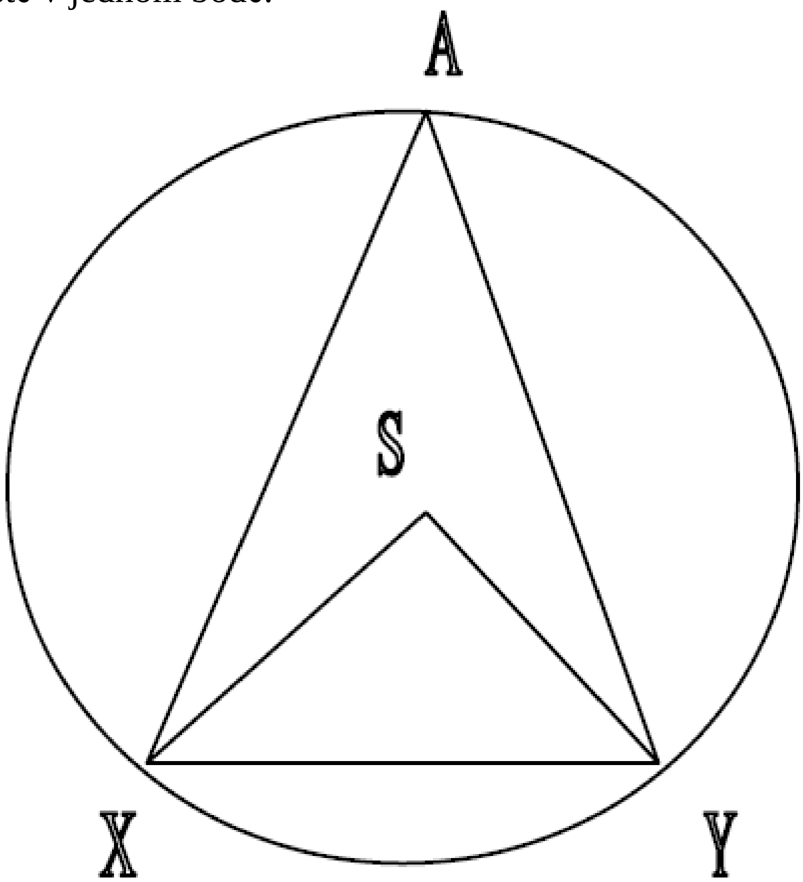
Obsah kruhové výseče

$$\boxed{S = \frac{\pi r^2}{360^o} \cdot \alpha}$$

7. **Středový a obvodový úhel**

Středový úhel α je úhel, který svírají dva poloměry kružnice (kruhu).

Obvodový úhel je takový úhel při bodu na kružnici jehož ramena protínají danou kružnici vždy ještě v jednom bodě.



Velikost obvodového úhlu vůči středovému úhlu příslušející stejné tětivě je poloviční.

Příklad 17 : Vypočítejte obsah kruhové výseče a délku kruhového oblouku s poloměrem r a příslušným středovým úhlem α, je-li :

a) $r = 4$ cm, $\alpha = 60^{o}$
b) $r = 6{,}3$ dm, $\alpha = 270^{o}$
c) $r = 18$ m, $\alpha = 135^{o}\,15'$.

Příklad 18 : Jak velkému úhlu odpovídá délka kruhového oblouku :

a) polovina kružnice;
b) polovina čtvrtiny kružnice
c) šestina kružnice;
d) tisícina kružnice;

Příklad 19 : Vypočítejte velikost úhlu, kterému přísluší délka kruhového oblouku, jestliže poloměr kružnice je 5 cm

a) 2,617 cm;
b) 5,67 cm
c) 9,59 cm;
d) 17,44 cm;
e) 30,53 cm;
f) 31,40 cm;

Příklad 20 : Vypočítejte velikost úhlu, kterému přísluší obsah kruhové výseče, jestliže poloměr kruhu je 4 cm ;

a) 4,19 cm^2;
b) 9,07 cm^2
c) 15,35 cm^2
d) 27,91 cm^2
e) 48,84 cm^2;
f) 50,24 cm^2;

Příklad 21 : Vypočtěte poloměr kružnice, jestliže délka kruhového oblouku 9,59 cm přísluší středovému úhlu 110^o.

Příklad 22 : Vypočtěte obsah kruhové výseče, který přísluší kruhovými oblouku délky, jestliže poloměr kružnice je 5 cm :

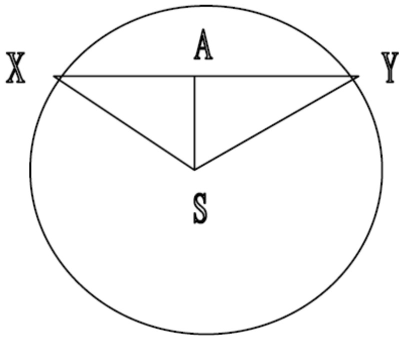
a) 2,617 cm;
b) 5,67 cm;
c) 9,59 cm;
d) 17,44 cm;
e) 30,53 cm;
f) 31,40 cm;

Příklad 23 : Vypočtěte délku kruhového oblouku, který přísluší kruhové výseči, jestliže poloměr kružnice je 5 cm :

a) 9,81 cm^2;
b) 15,7 cm^2
c) 11,12 cm^2;
d) 30,75 cm^2;
e) 59,09 cm^2;
f) 74,14 cm^2;

Příklad : Vypočtěte velikost kruhové úseče určené kružnicí o poloměru 5 cm, tětivou o velikosti 8 cm a úhlem 106^o , pod kterým vidíme koncové body tětivy.

Řešení :



Zápis : /SY/ = 5 cm /XY/ = 8 cm /AY/ = 4 cm úhel YSX měří 106^0

Trojúhelník ASY je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A.

Obsah kruhové výseče $S = \frac{\pi . r^2}{360^0} . \alpha$ $S_1 = \frac{3{,}14 . 5^2}{360} . 106 = 23{,}11$ (cm^2)

$SA^2 + AY^2 = SY^2$

$SA^2 + 4^2 = 5^2$

/SA/ = 3 (cm)

Obsah trojúhelníka SYX $S_2 = \frac{XY . AS}{2}$

$S_2 = \frac{8.3}{2}$

$S_2 = 12$ (cm^2)

Obsah kruhové úseče $S = S_1 - S_2$

<u>$S = 11{,}11$ (cm^2)</u>

Příklad 24 : Jak velkou dráhu vykoná hrot velké hodinové ručičky dlouhé 10 cm za :

a) 1 hodinu;
b) 5 hodin
c) 7,5 hodin
d) 31 hodin
e) půl dne;
f) celý den;
g) 1 minuta;
h) 10 minut;

Příklad 25 : Jak velkou dráhu vykoná hrot malé hodinové ručičky dlouhé 3 cm za :

a) 1 hodinu;
b) 5 hodin
c) 7,5 hodin
d) 31 hodin
e) půl dne;
f) celý den;
g) 1 minuta;
h) 10 minut;

Příklad 26 : Sekundová ručička hodin dosahuje svým koncem až ke kružnici <u>k</u>, která ohraničuje ciferník. Jakou část kružnice k opíše konec této ručičky při pohybu za :

a) 2 s;
b) 15 s;
c) 30 s;
d) 45 s;
e) 50 s;
f) 60 s;

Příklad 27 : Kolik procent obsahu kruhu představuje obsah kruhové výseče, jejíž poloměry svírají úhel 45°.

Příklad 28 : Vypočtěte délku kružnice k a obsah kruhu K, který je touto kružnicí určen, je-li tato kružnice:

a) vepsána čtverci o straně a = $\sqrt{6\text{cm}}$;
b) opsána čtverci o straně a = $\sqrt{2\text{cm}}$;
c) opsána obdélníku o stranách a = 8 cm, b = 6 cm;
d) vepsána kosočtverci s výškou v = 4 cm;
e) vepsána rovnostrannému trojúhelníku, jehož obsah je $\sqrt{3}$ cm^2;

Příklad 29 : Vypočtěte délku kružnice, jestliže :

a) její poloměr je o 1 cm větší než poloměr kružnice délky 10.π cm;
b) její délka je o 1 cm větší než délka kružnice o poloměru 5 cm;
c) obsah kruhu, který má stejný poloměr, je 36.π cm^2;
d) má poloměr v poměru 6 : 5 k poloměru kružnice délky $\sqrt{5}$.π cm;
e) její poloměr se rovná délce kružnice o poloměru 6 cm;

Příklad 30 : Vypočtěte obsah kruhu, jestliže :

a) má poloměr o 1 cm větší než kruh o obsahu 12. π;
b) má obsah o 1 cm^2 větší než kruh o poloměru 5 cm;
c) délka kružnice, která má stejný poloměr, je 9. π cm;
d) má poloměr v poměru 7 : 3 k poloměru kruhu o obsahu 18. π;
e) má poloměr v poměru 2 : 3 k poloměru kružnice o délce $\sqrt{3}$. π cm;

Příklad 31 : Jak se změní délka kružnice a obsah kruhu, jestliže :

a) poloměr zmenšíme na polovinu;
b) poloměr zmenšíme o 50 %;
c) poloměr ztrojnásobíme;
d) poloměr čtyřikrát zmenšíme;
e) průměr dvakrát zvětšíme;
f) průměr třikrát zvětšíme;
g) průměr vynásobíme číslem 1,5;

Příklad 32 : Vypočtěte délku opsané kružnice pravoúhlému trojúhelníku ABC, pro který platí :

a) odvěsny měří 4 cm a 6 cm;
b) odvěsny měří 2 cm a 7 cm;
c) přepona měří 5 cm, odvěsna $\sqrt{5}$ cm;
d) odvěsna měří $\sqrt{10}$ cm, přepona 10 cm.

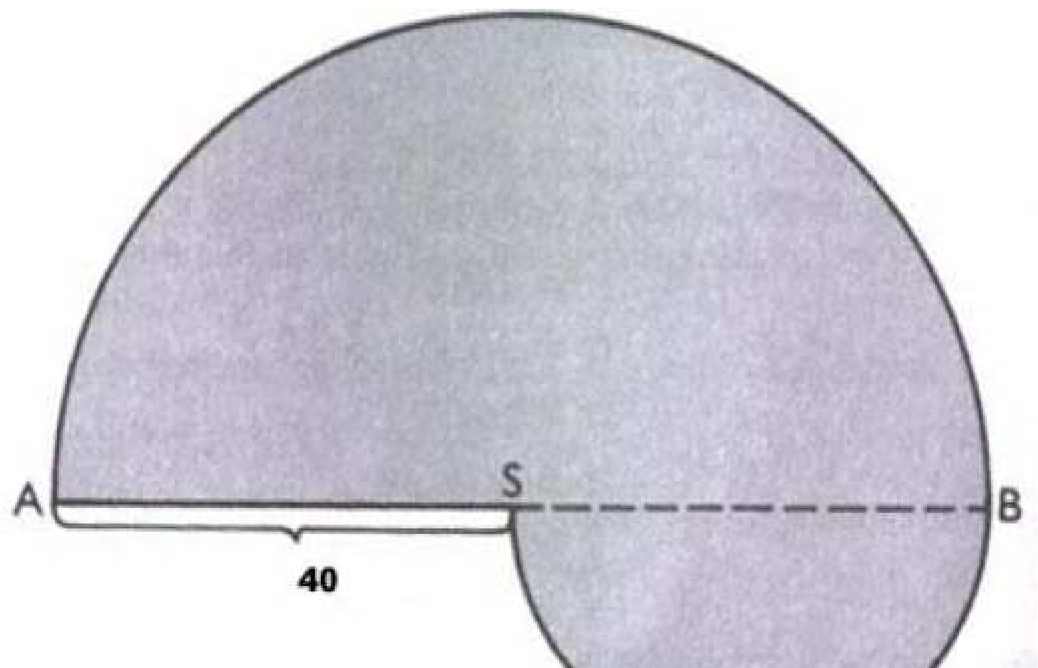
Příklad 33 : Je dán rovnostranný trojúhelník ABE, čtverec ABCD, k_1 je vepsaná kružnice rovnostrannému trojúhelníku ABE a má obvod $\sqrt{2}\,.\,\pi$ cm. Vypočtěte délku kružnice k_2, která je opsaná čtverci ABCD.

Příklad 34 : Kružnice k_1 je vepsaná a k_2 je kružnice opsaná čtverci ABCD. Vypočtěte délku kružnice k_2, jestliže délka k_1 je 5. π cm.

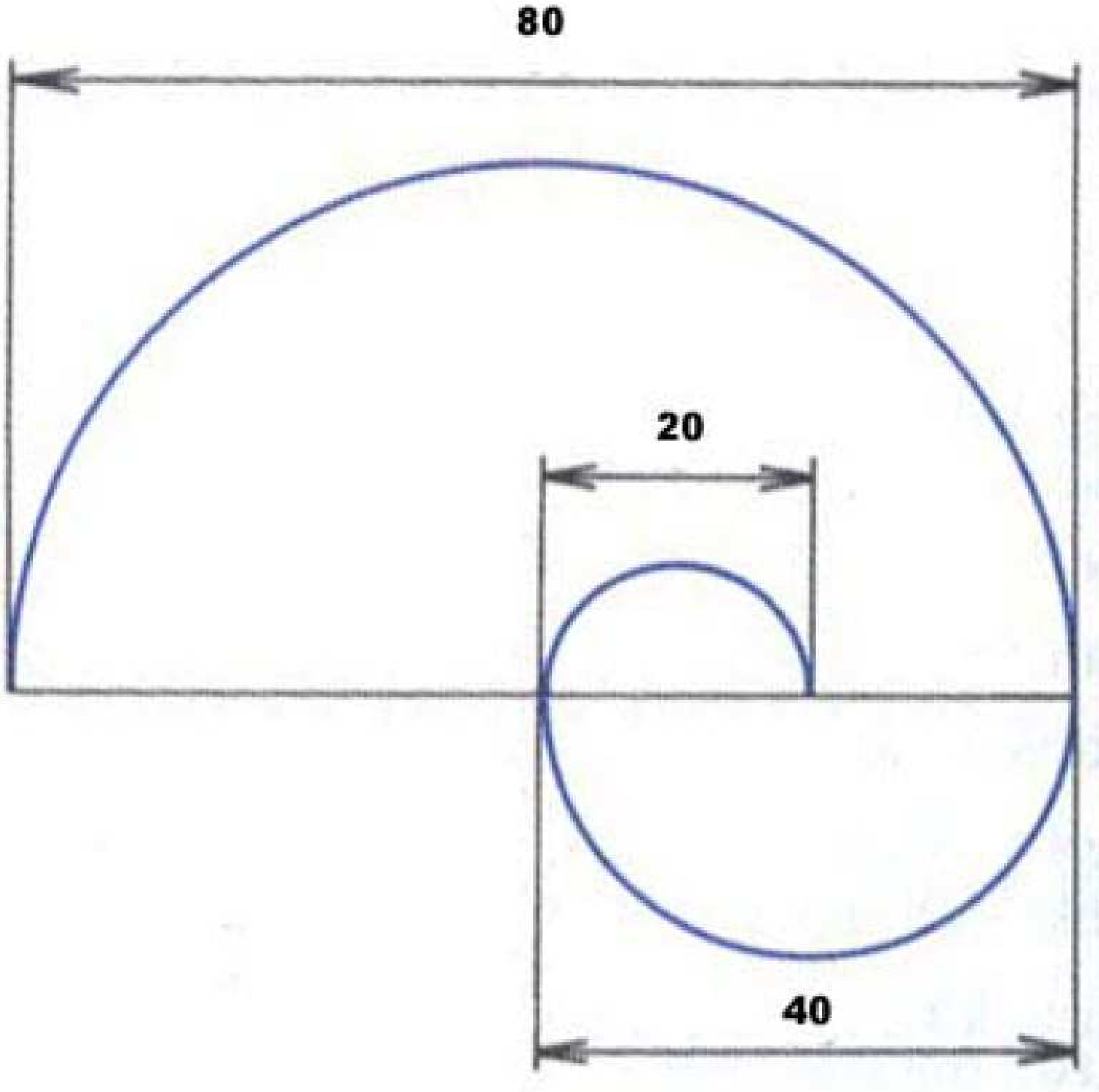
Příklad 35 : Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Kružnice k_2 je kružnice opsaná trojúhelníku ABC, kružnice k_1 prohází vrcholem C a dotýká se strany AB. Vypočtěte délku kružnice k_2, jestliže délka k_1 je 8. π cm.

Příklad 36 : Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, kružnice k_1 má průměr stranu BC, kružnice k_2 je vepsaná kružnice trojúhelníku ABC. Vypočtěte délku kružnice k_2, jestliže délka kružnice k_1 je 6. π cm .

Příklad 37 : Vypočtěte obsah vyznačené plochy. Číselný údaj je v milimetrech.



Příklad 38 : Vypočtěte délku spirály. Průměry jsou v milimetrech.



<u>Výsledky příkladů:</u>

2) střed dané kružnice;
3) a) nekonečně mnoho; **b)** dvě; **c)** jedna; **d)** žádná; **e)** dvě; **f)** dvě;
g) žádná;
4) a) přibližně 9,54 cm; **b)** ne; **c)** 2;
5) iracionálním číslem, protože nelze vyjádřit jako podíl dvou celých čísel;
6) a) 31,4 cm; 78,5 cm^2; **b)** 81,64 mm; 530,66 mm^2; **c)** 40,192 dm;
128,61 dm^2; **d)** 131,88 cm; 1 384,74 cm^2; **e)** 6,594 m; 3,46 m^2;
f) 28,574 cm; 65 cm^2;
7) a) 78,5 cm^2; **b)** 63,58 m^2; **c)** 200,96 dm^2; **d)** 314 mm^2; **e)** 530,66 mm^2;
8) a) 50,24 cm; **b)** 56,52 m; **c)** 31,4 m; **d)** 6,594 m; **e)** 28,574 mm;
9) 95,5 m;**10) a)** 1 018 m^2; **b)** 2 458 m^2;**11)** 796,18 krát;
12) a) 22,2 cm; **b)** 15,7 cm;**13)** 11,3 cm;**14)** 86 cm^2;**15)** 140 cm;**16)** 4.π cm;
17) a) 8,38 cm^2; 4,19 m; b) 93,52 dm^2; 29,67 dm; c) 382,4 m^2; 42,47 m;
18) a) 180^0; b) 60^0; c) 45^0; d) 0,36^0;
19) a) 30^0; **b)** 65^0; **c)** 110^0; **d)** 200^0; **e)** 350^0; **f)** 360^0;
20) a) 30^0; **b)** 65^0; **c)** 110^0; **d)** 200^0; **e)** 350^0; **f)** 360^0;**21)** 5 cm;
22) a) 6,54 cm^2; **b)** 14,17 cm^2; **c)** 23,99 cm^2; **d)** 43,61 cm^2; **e)** 76,32 cm^2;
f) 78,5 cm^2;
23) a) 3,92 cm; **b)** 6,28 cm; **c)** 4,45 cm; **d)** 12,3 cm; **e)** 23,64 cm;
f) 29,66 cm;
24) a) 62,8cm; **b)** 314 cm; **c)** 471 cm; **d)** 1 946,8 cm; **e)** 753,6 cm;
f) 1 507,2 cm; **g)** 1,05 cm; **h)** 10,46 cm;
25) a) 1,57 cm; **b)** 7,85 cm; **c)** 11,77 cm; **d)** 48,67 cm; **e)** 18,84 cm;
f) 37,68 cm; **g)** 0,03 cm; **h)** 0,26 cm;
26) a) 301; **b)** 41; **c)** 21; **d)** 43; **e)** 65; **f)** 1;
27) 12,5 %
28) a) π.6 cm, 1,5. π = 4,71 cm^2; **b)** 2.π = 6,28 cm, π = 3,14 cm^2;
c) 10. π = 31,4 cm, 25. π = 78,5 cm^2; **d)** 4. π = 12,56 cm, 4. π = 12,56 cm^2;
e) π.3.32 = 3,62 cm, 31. π = 1,05 cm^2;
29) a) 12. π = 37,68 cm; **b)** 1 + 10. π = 32,4 cm; **c)** 12. π = 37,68 cm;
d) 1,2.5. π = 8,44 cm; **e)** 24 π^2 = 236,64 cm;
30) a) (13 +4.3). π = 62,55 cm^2; **b)** 25. π + 1 = 79,5 cm^2;
c) 20.25. π = 63,59 cm^2; **d)** 98. π = 307,72 cm^2; **e)** 31. π = 1,05 cm^2;
31) a) polovina, čtvrtina; **b)** polovina, čtvrtina; **c)** 3 krát větší, 9 krát větší;
d) 4 krát menší, 16 krát zmenší; **e)** 2 krát zvětší, 4 krát zvětší; **f)** 3 krát zvětší,
9 krát zmenší; **g)** 1,5 krát zvětší, 2,25 krát zvětší;
32) a) 2.13.π = 22,64 cm; **b)** 53. π = 22,86 cm; **c)** 5. π = 15,7 cm;

d) 109. π = 32,79 cm;

33) 2.3. π cm; **34)** 5.2. π = 22,14 cm; **35)** 332. π = 33,49 cm;

36) 2.3. π = 10,86 cm; **37)** 3140 mm^2 **38)** 219,8 mm **40)** 8 cm;